BÀI THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH III HỌC KÌ 20152

Đề 1

Khóa: K60. Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: *Không được dùng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm*

Câu 1 (1 điểm) Tính tổng của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$$

Câu 2 (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n e^n}x^n$$

Câu 3 (1 điểm) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$$

Câu 4 (1 điểm) Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ 4

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-2\le x\le 0)\\ \dfrac{x}{2} & (0<x<2)\end{cases}$$

Câu 5 (3 điểm) Giải phương trình vi phân sau:

a. $e^x(2+2x-y^2)dx-2e^xydy=0$
b. $y''+9y=2\cos x\cos 2x$
c. $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=e^{-x}$ bằng cách đặt $u=xy$

Câu 6 (1 điểm) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân sau:

$$x^{(3)}+x''-12x'=0,\quad x(0)=0, x'(0)=x''(0)=1$$

Câu 7 (1 điểm) Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân sau:

$$x''+16x=f(t),\ x(0)=x'(0)=0 \text{ với } f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<\pi)\\ 0 & (t\ge\pi)\end{cases}$$

Câu 8 (1 điểm) Giải phương trình vi phân sau $x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=e^x$

Hết

Đáp án - Đề test số 1

Câu 1. $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right)$$

Đặt: $v_n=\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$

$\Rightarrow v_{n+1}+v_n=\sqrt{(n+1)+(-1)^{n+1}}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$

Khi n chẵn thì: $v_{n+1}+v_n=\sqrt{n+1-1}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$=0$

Do đó, xét.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} v_i=\begin{cases} v_1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} & (\text{nếu } n \text{ - chẵn})\\ v_1 & (\text{nếu } n \text{ - lẻ})\end{cases}$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n=v_1=(-1) \quad \Rightarrow S=-1$

Câu 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n e^n}x^n$. Đặt: $\dfrac{(n+1)^n}{n^n e^n}=a_n$.

$$\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{e}}=e$$

⊕ $x=e$ thì $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$ phân kì Do $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\neq 0$

⊕ $x=-e$ thì $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot(-1)^n$ phân kì Do $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^n}(-1)^n\neq 0$

$\Rightarrow$ Miền HT là: $x\in(-e;e)$.

Câu 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = S$

(+) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ HT $\Leftrightarrow x \in (-1;1)$

(+) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ HT $\Leftrightarrow \frac{x}{3} \in (-1;1) \Leftrightarrow x \in (-3;3)$

$\Rightarrow$ Miền HT của hàm : $x \in (-1;1)$

Khi đó: $S = \frac{x}{1-x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{1-x/3} = $ ___

Câu 4. Chu kì tuần hoàn $T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Trong đó,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \quad (n=0,1,\dots) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \quad (n=1,2,\dots) \Rightarrow b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

(+) $a_0 = \frac{1}{4}\int_0^2 x.dx = \frac{x^2}{8}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}$

(+) $a_n = \frac{1}{4}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \quad (n=1,2,\dots)$ Đặt: $u = x \Rightarrow du = dx$

$v = \int \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$

$$\Rightarrow a_n = +\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right)\cdot\frac{2}{n\pi} = \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right)$$

$(n=1,2,\dots)$

$\oplus$ $b_n = \frac{1}{4}\int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$. đặt. $u = x \to du = dx$

$v = \int \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \dfrac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$

$\to b_n = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$

$= \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{n\pi}\cdot(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$

KL:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Câu 5.

a) $e^x(2+2x-y^2)\,dx - 2e^x y\,dy = 0$. $(*)$

đặt. $P(x,y) = e^x(2+2x-y^2) \to \frac{\partial P}{\partial y} = e^x(-2y)$

$Q(x,y) = -2e^x y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -2e^x y$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ đt pt vi phân toàn phần

pt $(*) \Leftrightarrow \int_0^x e^t(2+2t)\,dt - \int_0^y 2e^x t\,dt + C = 0$

$\Leftrightarrow 2e^t t\Big|_0^x - 2e^x.\frac{t^2}{2}\Big|_0^y + C = 0$

hay: $2xe^x - e^x.y^2 + C = 0$

b) $y'' + 9y = 2\cos x.\cos 2x$ $(*)$

xét pt đặc trưng: $k^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3i$

→ Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất suy ra từ (*) là

$$\overline{y} = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Giả sử C_1, C_2 là các hàm số của x. Theo pt Lagrange ta có

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos 3x + C_2' \cdot \sin 3x = 0 \\ C_1' \cdot (-3\sin 3x) + C_2' \cdot (3\cos 3x) = 2\cos x \cdot \cos 2x. \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{2}{3} \cos x \cdot \cos 2x \sin 3x \\ C_2' = \frac{2}{3} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{2}{3} \int \cos x \cos 2x \cdot \sin 3x \, dx \\ C_2 = \frac{2}{3} \int \cos x \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx \end{cases}$$

← tự tính nguyên hàm là Ok.

c) Đặt: $u = xy \Rightarrow y' = \dfrac{u' \cdot x - u}{x^2} \rightarrow y' = \dfrac{u'}{x} - \dfrac{u}{x^2}.$

$$\Rightarrow y'' = \frac{u'' \cdot x - u'}{x^2} - \frac{u' \cdot x^2 - 2x \cdot u}{x^4} = \frac{u''}{x} - \frac{2u'}{x^2} + \frac{2u}{x^3}.$$

Thay vào pt ta có.

$$u'' - \frac{2u'}{x} + \frac{2u}{x^2} + 2(1-x)\left(\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}\right) + (x-2) \cdot \frac{u}{x} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow u'' - \cancel{\frac{2u'}{x}} + \cancel{\frac{2u}{x^2}} + \cancel{\frac{2u'}{x}} - \cancel{\frac{2u}{x^2}} - 2u' + \cancel{\frac{2u}{x}} + u - \cancel{\frac{2u}{x}} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow u'' - 2u' + u = e^{-x}$$ ← pt vi phân tuyến tính cấp 2

<u>giải bình thường</u>

<u>Câu 6.</u>

Đặt: $\mathcal{L}\{x\} = X(s) \rightarrow \mathcal{L}\{x'\} = s \cdot X(s).$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{x''\} = s^2 . X(s) - 1$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{x^{(3)}\} = s^3 . X(s) - s - 1$

Do đó, pt $\Leftrightarrow s^3 X(s) - s - 1 + s^2 . X(s) - 1 - 12 . s X(s) = 0$.

$\Leftrightarrow X(s) = \dfrac{s+2}{s(s^2+s-12)}$

$\Rightarrow x = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ ← Làm bằng biến đổi ra phân thức đơn giản.

<u>Câu 7</u>. Đặt: $\mathcal{L}\{x\} = X(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{x''\} = s^2 . X(s)$

pt $\Leftrightarrow s^2 . X(s) + 16\, X(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$\Leftrightarrow X(s) = F(s) . \dfrac{1}{s^2+4^2} \Rightarrow x = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) . \dfrac{1}{s^2+4^2}\right\}$.

$\Rightarrow x = f(t) * \dfrac{1}{4}\sin 4t = \dfrac{1}{4} . \int_0^t f(x) . \sin(4t - 4x)\, dx$.

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^t \sin(4t-4x)\, dx & (\text{khi } t \in (0, \pi)) \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^\pi \sin(4t-4x)\, dx + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\pi^t 0 . \sin(4t-4x)\, dx & (\text{khi } t \geq \pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{1}{4} . \dfrac{1}{4}\cos(4x-4t)\Big|_0^t & t \in (0, \pi) \\ \dfrac{1}{4} . \dfrac{1}{4} . \cos(4x-4t)\Big|_0^\pi & t \geq \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \dfrac{1}{16}(1 - \cos 4t) & 0 < t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

Câu 8. $x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = e^x$.

Đặt. $y = \frac{z}{x^2} \rightarrow y' = \frac{z'.x - 2z}{x^3} \Rightarrow y'' = \frac{z''x^2 - 4z'x + 6z}{x^4}$

Thay vào pt ta có: $z'' + z = e^x$.

Ta có pt đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$

$\rightarrow$ nghiệm tq của pt thuần nhất: $\bar{z} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Giải tiếp

$\underline{kl}$: $z = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{e^x}{2}$.

$\Rightarrow y = \frac{C_1}{x^2}\cos x + C_2\sin x + \frac{e^x}{2x^2}$.