BÀI THI CUỐI KÌ MÔN GIẢI TÍCH III HỌC KÌ 20152

Đề 2

Khóa: K60. Thời gian làm bài: 90 phút

Chú ý: ***Không được dùng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm***

Câu 1 (1 điểm) Xét sự hội tụ của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} + n\right)\pi$$

Câu 2 (1 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n} x^n$$

Câu 3 (1 điểm) Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{3 + \tan\frac{1}{n}} \right)^n$$

Câu 4 (1 điểm) Khai triển thành chuỗi Maclaurin của hàm số với $-1 \le x \le 1$

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

Câu 5 (3 điểm) Giải phương trình vi phân

a. $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0, \ y(1) = 0$ b. $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3x}{5}} \cos x$

c. $y'' + (4e^x - 1)y' + 4e^{2x}y = 0$ bằng cách đặt $t = e^x$

Câu 6 (1 điểm) Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình sau:

$$tx'' + (t-1)x' + x = 0, \ \ x(0) = 0$$

Câu 7 (1 điểm) Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x' - 3y' + x = 0 \\ x' - y' + y = 0 \end{cases}, \ \ x(0) = 2, \ y(0) = -2$$

Câu 8 (1 điểm) Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số sau trên $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) \sin nx$$

Hết

Đáp án – Test số 2.

Câu 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}+n\right)\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}+n\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \sin\frac{\pi}{n}.$$

Xét : $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n . \sin\frac{\pi}{n}$ Đặt : $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$

⊕ $\forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{\pi}{n} \in (0; \pi/2) \Rightarrow a_n > 0$.

⊕ $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n+1} > 0 \rightarrow a_n > a_{n+1} \rightarrow \{a_n\}$ giảm

⊕ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n . \sin\frac{\pi}{n}$ HT $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ HT.

Câu 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.e^n} x^n$. Đặt : $a_n = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.e^n}$

⊕ $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n . \frac{1}{e} = 1. \rightarrow R = 1.$

⊕ $x = 1$ thì ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n}$ ⊛

Ta có : $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n . \frac{1}{e} < e . \frac{1}{e} = 1$ vì $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$.

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1^- \Rightarrow$ chuỗi ⊛ HT

⊕ $x = -1$ thì ta có $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n}$.

Tiêu trị như trên ⇒ chuỗi (⊗⊗) HT tuyệt đối.

KL: Miền HT của chuỗi đã cho $x \in [-1;1]$

<u>Câu 3</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n.(3^{\frac{1}{n}}-1)}{3+\tan\frac{1}{n}}\right)^n \qquad \text{Đặt}: a_n=\left(\frac{n(3^{\frac{1}{n}}-1)}{3+\tan\frac{1}{n}}\right)^n > 0$$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n.(3^{\frac{1}{n}}-1)}{3+\tan\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n.\frac{1}{n}.\ln 3}{3} = \dfrac{\ln 3}{3} < 1$

⇒ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT theo T/c Cauchy

<u>Câu 4</u>.

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \qquad x \in [-1;1]$$

Ta có: $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}} \Rightarrow g(t) = (1-t^4)^{-1/2}$

Theo khai triển Maclaurin thì

$$g(t) = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)t^4 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)(t^4)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t^4)^n + \dots \quad (|x|<1)$$

$$\Rightarrow g(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{n!}.t^{4n}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{n!}t^{4n}\right)dt$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{t^{4n+1}}{4n+1} \right) \Bigg|_0^x$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(4n+1)\, n!} \cdot x^{4n+1}$$

Câu 5.

a) $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0$, $y(1) = 0$

$(\Leftrightarrow)$ $y' - \dfrac{x}{x+1} \cdot y - 1 = 0$.

(+) $y_1 = e^{-\int \frac{-x}{x+1} dx}$ $\Rightarrow y_1 = e^{x - \ln|x+1|} = \dfrac{e^x}{x+1}$.

(+) Nghiệm pt đã cho là:

$y = y_1 \cdot \displaystyle\int \frac{dx}{y_1}$ $\rightarrow y = \dfrac{e^x}{x+1} \displaystyle\int (x+1) \cdot e^{-x}\, dx$.

$\rightarrow y = \dfrac{e^x}{x+1} \cdot \left(-(x+2) \cdot e^{-x} + C \right) \Rightarrow y = -\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{Ce^x}{x+1}$

b) $5y'' - 6y' + 5y = e^{3x/5} \cdot \cos x$.

Xét pt đặc trưng. $5k^2 - 6k + 5 = 0$. $\Leftrightarrow k = \dfrac{3}{5} \pm \dfrac{4}{5} i$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $\bar{y} = e^{3x/5} \left(C_1 \cos \dfrac{4x}{5} + C_2 \sin \dfrac{4x}{5} \right)$

Dùng p² Lagrange để giải ta suy ra đc nghiệm.

Câu 5c.

$$y'' + (4e^x - 1)y' + 4e^{2x}y = 0$$

Đặt: $t = e^x > 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = e^x \cdot y'_t \Rightarrow y'_x = t \cdot y'_t$

$$\Rightarrow y''_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow y''_x = y''_t \cdot t^2 + y'_t \cdot t.$$

Thay vào pt ta có:

$$y''_t \cdot t^2 + y'_t \cdot t + (4t - 1) t \cdot y'_t + 4t^2 \cdot y = 0$$

$$\Leftrightarrow y''_t \cdot t^2 + 4t^2 \cdot y'_t + 4t^2 \cdot y = 0$$

$$\Leftrightarrow y''_t + 4y'_t + 4y = 0$$

↑ pt thuần nhất hệ số hằng

giải bình thường là ra

Câu 6.

Đặt: $\mathcal{L}\{x\} = X(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{x'\} = s.X(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t.x'\} = -(s.X(s))' = -s.X'(s) - X(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{x''\} = s^2.X(s) - x'(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t.x''\} = -(s^2.X(s) - x'(0))' = -2sX(s) - s^2X$$

Thay vào pt rồi giải bình thường suy ra kquả!!!

Câu 7. Đặt: $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$

$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{x'\} = s X(s) - 2 \\ \mathcal{L}\{y'\} = s \cdot Y(s) + 2 \end{cases}$

Thay vào hpt ta được.

$$\begin{cases} s \cdot X(s) - 3s \cdot Y(s) - 6 + X(s) = 0 \\ s \cdot X(s) - s \cdot Y(s) + 6 + Y(s) = 0 . \end{cases}$$

Giải hpt này suy ra $X(s)$ và $Y(s)$ $\rightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases}$

Câu 8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) \sin nx}_{a_n}$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{1+x^2} \geq 1 \quad \forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}} \leq \sqrt{x} \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}} dx < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\, dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\Rightarrow |a_n| \leq \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{n^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ~~mà~~ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ HT

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Hội tụ đều trên $x \in \mathbb{R}$.